テーマ２　３乗したら２になる数を計算しよう！

昔々その昔，あるところで病気が大流行しました．人々は困り抜いて神さんにお願いしました．「お願いですから病気をおさめてください．何でもいうことをききます」　神さんとて病気は何ともできません，返事に困った神さん「分かった，分かった．神殿のほこらが狭いのでカミさんももらわれへんねん．ほこらを２倍にしたら，病気は何とかしまひょ…」

人々は大急ぎでほこらの横幅を２倍にしました，神さんとカミさんのために．ところが病気の流行は止みません．「神様，約束違反ですよ」人々は怒っています．

神さん開き直っていいました．「だれが横に２倍にしろといった！　形はそのままで２倍の大きさにしないと病気は何ともならへんで…」

さあ大変です．３乗して２になる数を見つけないと！　これが新テーマです．

$x^3 = 2$ となる x をどのように見つけるか？　$\sqrt{2}$ で使った手法を思い出そう．

【方法１】　３乗の数をずらりと並べます．さて，問題の x を求めましょう．

1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000
9261	10648	12167	13824	15625	17576	19683	21952	24389	27000
29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319	64000
68921	74088	79507	85184	91125	97336	103823	110592	117649	125000

【方法２】　式 $x^3 = 2$ を変形して，電卓で計算する．式変型に注目！

$x^3 = 2$ の両辺に x をかけて，$x^4 = 2x$ ．　$x^4 = \left(x^2\right)^2$ だから，$x^2 = \sqrt{2x}$ ．

さらに√をとって，$x = \sqrt{\sqrt{2x}}$ ．ここで，reentrant な処理をして…

$$x = \sqrt{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2\cdots}}}}}}}}$$

となります．

電卓では，$\boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ と押して，表示がフリーズするまで

$\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ を繰り返します．

〔　1.2599209　または，1.259921　でフリーズ　〕

次に，フリーズした値を３乗すると…

〔 $\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ または $\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}$ を押す 〕

〔1.2599209 $\overset{3乗}{\Rightarrow}$ 1.9999991 ，1.259921 $\overset{3乗}{\Rightarrow}$ 1.9999997 〕

フリーズした値では３乗しても２には不足するので，次のように補正します．

〔1.2599211 $\overset{3乗}{\Rightarrow}$ 2.0000001 〕

つまり，x ＝1.2599211 ならば，$x^3 = 2$ としてよいわけです．

ここで，$x^3 = 2$ となる x を $\sqrt[3]{2}$ と書いて，$\sqrt[3]{2}$ ＝1.2599211．

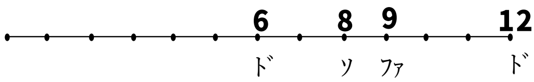
〈電卓計算〉 $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{10}$ をそれぞれ電卓で計算しよう

$\sqrt[3]{5} =$

$\sqrt[3]{7} =$

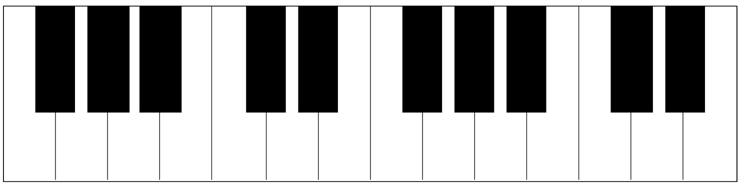
$\sqrt[3]{10} =$

少々脱線します．ピタゴラスの考えた音階を話題にします．彼は実験で音階と和音についての発見をしました．



弦の長さを12等分して，12の長さで出る音を“ド”とすると，９の長さで“ファ”，８の長さで“ソ”，６の長さで高い“ド”（ド）がでること，そして，“ド・ソ・ド”は美しい和音になることを発見しました．

ピタゴラスの発見を右の鍵盤を参考にしてまとめると…



《音階の規則》

① 弦の長さを $\frac{1}{2}$ （$=\frac{6}{12}$）にすると，１オクターブ（８度，12半音）高くなる

② 弦の長さを $\frac{3}{4}$ （$=\frac{9}{12}$）にすると，４度（ド→ファ，５半音）高くなる

③ 弦の長さを $\frac{2}{3}$ （$=\frac{8}{12}$）にすると，５度（ド→ソ，７半音）高くなる

《和音の規則》

④ １，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$ の長さの弦の音は，美しい和音になる

このピタゴラスの《音階の規則》にしたがって，音階と弦の長さを計算してみよう．

			ド	レ	ミ	ﾌｧ	ソ	ラ	シ	ド				
			1			$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$				

ところが，こうしてできた音階には重大なミスが潜んでいます．
それは，“ド・ミ・ソ”の和音のことです．

美しい和音の弦の長さの比 $\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ は分子を揃えると $\left(\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4}\right)$ となります．

和音の謎は“数列”にあります．等差数列の逆数（分母が等差数列で分子が等しい数列）を“調和数列”というのは，ピタゴラスの業績に起因しているかも知れません．

さて，“ド・ミ・ソ”の和音を分析します．
弦の長さは $\left(1,\frac{64}{81},\frac{2}{3}\right)$，分子を揃えて $\left(\frac{64}{64},\frac{64}{81},\frac{64}{96}\right)$．
(64 , 81 , 96) は等差数列ではないけれど，(64 , 80 , 96) なら等差数列です．つまり，和音重視の適切な弦の長さは $\left(\frac{64}{64},\frac{64}{80},\frac{64}{96}\right)$ であると考えられ，これを約分した $\left(1,\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)$ が“ド・ミ・ソ”の和音の弦の長さの比になるわけです．

さて，新しい規則を追加して整理します．その規則に沿って音階を完成させよう！

《音階の規則》

① 弦の長さを $\frac{1}{2}$ （$=\frac{6}{12}$）にすると，１ｵｸﾀｰﾌﾞ（８度，12半音）高くなる

② 弦の長さを $\frac{3}{4}$ （$=\frac{9}{12}$）にすると，４度（ド→ファ，５半音）高くなる

③ 弦の長さを $\frac{2}{3}$ （$=\frac{8}{12}$）にすると，５度（ド→ソ，７半音）高くなる

《和音の規則》

④ １，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$ の長さの弦の音は，美しい和音になる

⑤ １，$\frac{4}{5}$，$\frac{2}{3}$ の長さの弦の音は，美しい和音になる

ド	レ	ミ	ﾌｧ	ソ	ラ	シ	ド	
1		$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$	

初めにピタゴラスが考えた音階を“*ピタゴラス音階*”といい，和音を重視した音階を“*純正調音階*”または“*純正律*”といいます．

音楽の技術が発達すると，“*純正調音階*”は「移調」「転調」という壁に突き当たります．“ド”の基準が動くと音階が成立しなくなるのです．とりわけ，鍵盤楽器でのは対応は難しいことになります．

そこで考えられたのが“*平均律*”という音階，和音を犠牲にしても高度なテクニックを駆使した音楽を楽しみたかったのでしょうか.“*平均律*”では，どこの半音をとっても弦の長さの比率は同じです．

１オクターブは12半音です，半音ごとに弦の長さを $\frac{1}{y}$ 倍すれば， $\left(\frac{1}{y}\right)^{12}=\frac{1}{2}$ になります．つまり， $y^{12}=2$ となるわけです．（長い脱線もここでおしまい．）

$y^{12}=2$ より， $\left(y^4\right)^3=2$ ．

また，先に求めた x は $x^3=2$ をみたす．よって，$y^4=x$ ．

つまり，“*平均律*”の比率 y は， $y=\sqrt{\sqrt{1.2599211}}$ により求められる！

1.059463を補正して“平均律の比率”は“1.0594631”が適切な値です．

［自由課題］　　ギターの弦の長さをはかって，上の比率を確かめてみよう．

“３乗したら２になる数”はここまで，同じ方法で“３乗したら３になる数”も“３乗したら５になる数”も求められますよね…

次の話題は，５乗したら…　７乗したら…　６乗したら…　です．

【 $x^5=2$ となる x を求めよう】

“５乗したら２になる数”を２の５乗根といい，$\sqrt[5]{2}$ と書きます．計算は…

$x^5=2$ より， $x^4=\frac{2}{x}$ ， $x=\sqrt{\sqrt{\frac{2}{x}}}$ ，

$$x=\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\frac{2}{x}}}}}}\cdots \qquad \text{よって，} \sqrt[5]{2}=\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\cdots}}}}}}}}}$$

電卓では，$\boxed{2}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ のあと $\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ の繰り返し．

電卓がフリーズしたら，$\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ で補正！

（補正は $\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ でもできます）

$\sqrt[5]{2}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

〈電卓計算〉　$\sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{7}$ を求めよう．もちろん補正も…　がんばりましょう！

$\sqrt[5]{3}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

$\sqrt[5]{5}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

$\sqrt[5]{7}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

【 $\sqrt[7]{2}$ を求めよう】

$x^7=2$ より，$x^8=2x$　よって，$x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2x}}}$　ゆえに，$\sqrt[7]{2}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2\cdots}}}$

電卓では，$\boxed{2}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ のあと $\boxed{}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ の繰り返し．

フリーズしたら，$\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ で補正…

（補正は $\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ でもできます）

さあ，計算！

$\sqrt[7]{2}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

〈電卓計算〉　$\sqrt[7]{5}, \sqrt[7]{7}, \sqrt[7]{9}$ を求めよう．もちろん補正も…

$\sqrt[7]{5}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

$\sqrt[7]{7}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

$\sqrt[7]{9}$ ；　フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

【 $\sqrt[6]{2}$ を求めよう】　考え方は二通りです．

その1.　これまでの方法で式変形 …

$x^6=2$ **より，** $x^8=2x^2$ **．　よって，** $x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2x^2}}}$

これまでの式とは形式が少しばかり違います．

電卓では， $\boxed{2}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ **のあと，** $\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ **の繰り返し…**

これは大変，うっかりすると間違えそうです．簡単な方法はないものでしょうか？

$\sqrt[12]{2}$ **の計算を思い出そう…**

その2.　$y=x^2$ **として式変形…**

$y=x^2$ **より，** $y^3=\left(x^2\right)^3=x^6=2$ **．　よって，** $y=\sqrt[3]{2}$ **．**

まず $\sqrt[3]{2}$ **を求めれば，** $\sqrt[6]{2}=x=\sqrt{y}=\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ **だ…**

[練習問題]　全部フリーズ値と補正値を書いてください．

(1) $\sqrt[3]{25}$ **；** $\boxed{}\boxed{}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ **のあと** $\boxed{\times}\boxed{}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ **の繰り返し，**

フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

(2) $\sqrt[5]{18}$ **；** $\boxed{}\boxed{}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ **のあと** $\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ **の繰り返し，**

フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

(3) $\sqrt[7]{77}$ **；** $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ **のあと** $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ **の繰り返し，**

フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

(4) $\sqrt[6]{6}$ **；** $\sqrt[3]{6}$ **を求める…** $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ **のあと** $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ **の繰り返し，**

フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

そこで， $\sqrt[6]{6}$ **を求めると…（　　　　　　　　　　）**

(5) $\sqrt[10]{10}$ **；** $\sqrt[5]{10}$ **は** $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ **のあと** $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ **の繰り返し，**

フリーズ値（　　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　　）

そこで， $\sqrt[10]{10}$ **を求めると…（　　　　　　　　　　）**

新しい式を作って電卓計算する問題です．これができれば完璧！

⑹ $\sqrt[9]{9}$ **；** $x^9 = 9$ **より，**

$\sqrt[9]{9} =$

電卓では $\square\square\square\square$ **，**

繰り返しは $\square\square\square\square\square\square\square$

$\sqrt[9]{9}$ **；　フリーズ値（　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　）**

⑺ $\sqrt[13]{13}$ **；** $\sqrt[6]{2}$ **のその1. の式変形を応用します．これで免許皆伝…**

$x^{13} = 13$ **より，**

$\sqrt[13]{13} =$

電卓では $\square\square\square\square\square\square$ **，**

繰り返しは $\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square$

フリーズ値（　　　　　　　　　）　補正値（　　　　　　　　　）